Programme de colle n°14

semaine du 12 au 16 janvier

Notions vues en cours

Chapitre 18 : Arithmétique (suite et fin)

- PGCD de n entiers, notation $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n$, associativité de $\wedge$, entiers premiers dans leur ensemble, entiers premiers entre eux deux à deux
- Généralisation des Théorèmes de Bézout-Bachet et de Bézout à n entiers, algorithme d'Euclide étendu à n entiers (principe)
- Nombre premier, lemme d'Euclide, tout entier admet un diviseur premier, décomposition en produit de facteurs premiers, il existe une infinité de nombres premiers
- Décomposition (dite généralisée) d'un entier $n \geq 1$ selon tous les nombres premiers (quitte à avoir des exposants nuls)
- Valuation p-adique, notation $v_p(a)$, lecture des valuations sur la décomposition d'un entier, valuation du produit / pgcd / ppcm, lien entre les valuations et la divisibilité / l'égalité de deux entiers
- Calcul pratique du pgcd et du ppcm en utilisant la décomposition en produit de facteurs premiers, $n \geq 2$ est premier si et seulement si aucun nombre premier p inférieur à $\sqrt{n}$ ne divise n.
- Petit théorème de Fermat (cas général, cas où l'entier est premier avec p)

Chapitre 19 : Structures algébriques

- Loi de composition interne (l.c.i.), loi commutative, loi associative, x et y commutent (pour $\top$) si $x \top y = y \top x$
- Élément neutre : définition et unicité, élément symétrisable : définition, UN symétrique d'un élément
- Groupe, groupe commutatif (ou abélien), groupes usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{\mathbb{R}}$ munis de $+$; $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{C}^*, \mathbb{R}_+^*$ munis de $\times$, dans un groupe il y a unicité de l'élément symétrique
- Notations additive et multiplicative pour les éléments neutres, les symétriques, les itérés n-ièmes ($n \in \mathbb{Z}$) : 0_E, $-a$, na ainsi que 1_E, a^{-1}, a^n. Règles de calcul (données ici en notation multiplicative) : $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$, $a^n a^m = a^{n+m}$ et $(a^n)^m = a^{nm}$
- Formules $(x')' = x$ et $(x \top y)' = y' \top x'$ (où z' désigne le symétrique de l'élément z)
- Élément régulier à gauche, à droite, élément régulier
- Partie stable par une l.c.i., loi induite (qu'on note souvent comme la loi initiale), sous-groupe : définition, caractérisations, $\{e\}$ et G sont des sous-groupes de G
- Morphisme de groupes : définition, iso- / endo- / automorphisme, image de l'élément neutre, du symétrique et de l'itéré n-ième par un morphisme

Les notions de noyau et d'image d'un morphisme sont hors-programme cette semaine.

Les questions de cours sont en page suivante

Questions de cours

Question Flash. Une question de cours sans démonstration choisie par l'examinateur, sur laquelle on doit passer un temps minimal. Cette question est choisie parmi celles ci-dessous, après les questions longues (chapitres **16 à 18**).

Question Longue. *Sauf mention contraire, les démonstrations sont à connaitre.* ***Les énoncés des théroèmes doivent être clairement... énoncés !***

1. Énoncé uniquement : Définition de la valuation p-adique d'un entier, décomposition généralisée, formules de $v_p(ab)$, $v_p(a \wedge b)$ et $v_p(a \vee b)$. Démontrer la formule de $v_p(ab)$. Chapitre 18, Théorème 18.45, Définition 18.47, Théorèmes 18.48 et 18.49
2. Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, on a $p \mid \binom{p}{k}$. Énoncé uniquement : petit théorème de Fermat. Chapitre 18, Lemme 18.50 et Théorème 18.52
3. Définition d'un groupe (avec des quantificateurs) ; pour tous a, b dans un groupe $(G, \top)$, compléter et démontrer les formules $(a')' = \ldots$ et $(a \top b)' = \ldots$ Chapitre 19, Définition 19.7 et Théorème 19.9

Questions Flash au programme :

Chapitre 18 :

- Si $a \mid b$ et $b \mid a$, que peut-on dire sur a et b ?
- Rappeler le théorème de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$ (avec toutes les hypothèses).
- Énoncer le théorème de Bézout-Bachet (aussi appelé relation de Bézout).
- Énoncer le théorème de Bézout.
- Si $a \mid bc$, peut-on dire que $a \mid c$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Si $a \wedge b = 1$ et $a \wedge c = 1$, peut-on dire que $a \wedge (bc) = 1$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Si $a \mid c$ et $b \mid c$, peut-on dire que $ab \mid c$? Sinon, quelle hypothèse doit-on rajouter ?
- Soit $a, n \in \mathbb{Z}$. Que signifie "a est inversible modulo n" ? Sous quelle condition est-ce que cela est vérifié ?
- Donner une relation simple qui fait intervenir $a \wedge b$ et $a \vee b$, avec $a, b \in \mathbb{Z}$.
- Énoncer le lemme d'Euclide.
- Donner la forme générale de la décomposition d'un entier n sous forme de facteurs premiers.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Rappeler une définition de la valuation $v_p(n)$ (deux définitions sont acceptées, cf 18.47).
- Donner une condition nécessaire et suffisante à $a \mid b$, qui fait intervenir les valuations $v_p(a)$ et $v_p(b)$. Et pour $a = b$?
- Compléter les formules suivantes : $v_p(ab) = \ldots$ et $v_p(a \wedge b) = \ldots$
- Énoncer le petit théorème de Fermat.

Chapitre 17 :

- Soit E un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'équivalence sur E ?
- Soit $x \in E$ et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Donner la définition de la classe d'équivalence de x.
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Si $x\mathcal{R}y$, que peut-on dire des classes d'équivalence de x et y ?
- Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E avec trois classes d'équivalences distinctes A, B, C. Que peut-on dire sur A, B et C ?

- Soit E un ensemble. Que doit vérifier $\mathcal{R}$ pour être une relation d'ordre sur E ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur E. Que doit vérifier $\preceq$ pour être un ordre total ? Comment appelle-t-on un ordre qui n'est pas total ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur E et $A \subset E$. Que doit vérifier A pour être bornée ?
- Soit $\preceq$ une relation d'ordre sur E et $A \subset E$. Que doit vérifier M pour être le maximum de A pour $\preceq$?

Chapitre 16 :

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Donner la définition de f est convexe.
- Donner l'inégalité de Jensen pour une fonction convexe.
- Donner l'inégalité des pentes pour une fonction convexe.
- Si f est convexe, que peut-on dire de ses cordes ? de ses tangentes (si f est dérivable) ? de ses sécantes ?
- Une des questions ci-dessus, où le mot "convexe" est remplacé par "concave".